THÈME DE RECHERCHE : LE NOMBRE PI ET LA FONTAINE DE ROCLES

Le charmant petit village de Rocles, outre son climat rigoureux, possède une fontaine rigoureusement octogonale occupée en son centre par un pilier de granit tout aussi octogonal.
Vous allez donc, dans un premier temps, calculer avec rigueur le volume d'eau que contient cette fontaine.

A) La première difficulté est qu'il est impossible de mesurer le rayon R du cercle circonscrit pour chacun des octogones : en effet, seule la mesure du côté des octogones est possible.
Réglons ce petit problème :

Soit un octogone de côté a et de rayon R (faire une figure)

1) Etablir une formule liant a, R et l'angle au centre de l'octogone

2) Exprimer R en fonction de a

B) En ce qui concerne la fontaine de Rocles, le côté a_1 du bassin est de 110 cm et le côté a_2 du piler est de 20cm.

1) En vous aidant de la formule du A), calculer les rayons R_1 et R_2 des cercles circonscrits aux deux octogones.

2) Calculer les apothèmes h_1 et h_2 des deux octogones (c'est-à-dire les hauteurs des triangles isocèles)

3) Calculer l'aire de chaque octogone.

4) En déduire le volume d'eau, au litre près, contenu dans le bassin si la profondeur de l'eau est de 48cm.

C) Et voici $\boldsymbol{\pi}$

Lorsque le nombre de côtés d'un polygone régulier augmente, le périmètre de ce polygone régulier se rapproche du périmètre du cercle circonscrit.

Sur une idée de Théo Lacordaire, voici comment on peut calculer une approximation du nombre π

1) Reprendre la formule du A) 1) et exprimer a en fonction de R

2) Adapter la formule pour qu'elle donne le côté a d'un polygone à n côtés en fonction de R et du nombre de côtés n.

3) En déduire une formule donnant le périmètre d'un polygone à n côtés inscrit dans un cercle de rayon R.

4) On prend un cercle de rayon R=500. Donner une valeur exacte de son périmètre.

5) Considérons un polygone inscrit dans ce cercle et possédant 1000 côtés. Calculer à l'aide de votre formule une valeur approchée du périmètre de ce polygone.

6) Montrer qu'en considérant que le périmètre du polygone est égal à celui du cercle, on peut obtenir une valeur approchée du nombre $\boldsymbol{\pi}$. Quelle est la différence entre votre valeur approchée et celle donnée par la calculatrice ?

Vous pouvez d'ailleurs vous amuser à augmenter le nombre de côtés pour vous approcher encore plus de $\boldsymbol{\pi}$.